UNIVERSITE MOHAMMED V
Faculté des sciences, Rabat

By Ray

Année 2014-15

Module Mathématiques 3
Elément : Analyse complexe, Filière SMP
Série #3

Exercice 1. Donner l'équation paramétrique des courbes suivantes:

a) $|z - 2 + 3i| = 4$.

b) Le segment joignant les points $1 + i$, $4 - 2i$.

Exercice 2. Que représente les équations paramétriques suivantes ?

a) $z(t) = 5 - 2it, -3 \leq t \leq 3$.

b) $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}, \ 0 \leq t \leq 2$.

c) $z(t) = 1 + 2t + 8it^2, -1 \leq t \leq 1$.

Exercice 3. Calculer l'intégrale curviligne complexe le long de la courbe C indiquée:

a) $\int_C e^{2z} dz$, C : le segment qui relie les points πi à $2\pi i$.

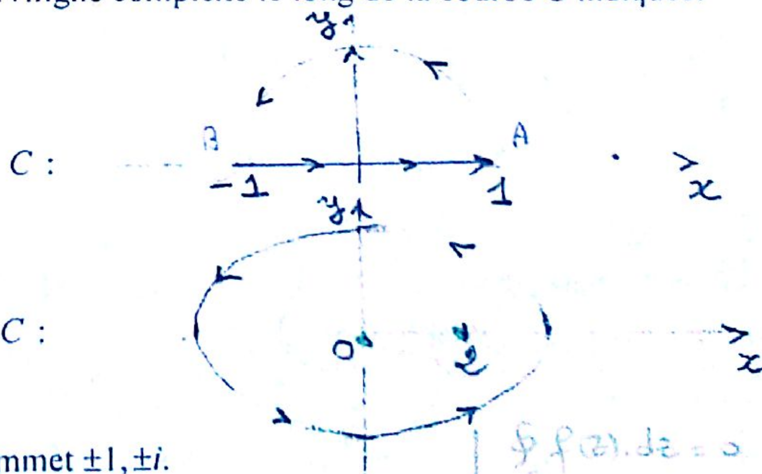
b) $\int_C \overline{z}\, dz$, C : la parabole $y = x^2$ reliant les points $-1 + i$ à $1 + i$.

c) $\int_C Imz^2 dz$, C : le triangle de sommets $z = 0, 1, i$.

Exercice 4. Calculer l'intégrale curviligne complexe le long de la courbe C indiquée:

a) $\oint_C \mathrm{Re}(2z) dz$, C :

b) $\oint_C \frac{7z - 6}{z^2 - 2z} dz$, C :



c) $\oint_C \ln(2 + z) dz$, C le caré de sommet $\pm 1, \pm i$.

Exercice 5. En utilisant les formules de Cauchy, calculer l'intégrale curviligne complexe le long de la courbe C orientée positivement :

a) $\oint_C \frac{(1 + 2z)\cos(z)}{(2z - 1)^2} dz$, $\quad C : \ |z| = 1$.

b) $\oint_C \frac{e^{2z}}{z(z - 2i)^2}) dz \quad C : |z - i| = 3$ et $|z| = 1$.

https://www.facebook.com/allcourstdtp

http://cours-td-tp-physics.blogspot.com

Exercice 6. a) Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ convergente en calculant la limite de la suite des sommes partielles S_n.

b) Déterminer si les séries numériques suivantes convergent, si oui calculer sa somme. Sinon, dites pourquoi la série diverge?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left[2(\frac{1}{4})^n + 3(-\frac{1}{5})^n \right]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n+2}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{5^n}$

c) En utilisant les tests de convergence, déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^2+2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Arc\tan(n)}{n^2+1}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{100}}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$.

c) Déterminer l'ensemble de convergence de la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^n}{n}.$$

Exercice 7. a) Déterminer si les séries complexes suivantes convergent ou divergent.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{10-15i}{n!})^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 - 2i}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{(i)^n}{3^n}$.

b) Déterminer l'ensemble de convergence de la série suivante :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4)^n}{(1+i)^n} (z-5)^n$.

https://www.facebook.com/allcourstdtp

| Analyse Complexe | | Série 3 | | SMP3 |

* Exercice 1

a - $|z-2+3i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = 16$

L'équation du cercle de centre $2-3i$ et de rayon 4

En utilisant les coordonnées polaires, on obtient :

$$\begin{cases} x(t)-2 = 4\cos t \\ y(t)+3 = 4\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 4\cos t + 2 \\ y(t) = 4\sin t - 3 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

on obtient une équation paramétrique de la courbe :

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + i y(t) \\ &= 4\cos(t) + 2 + i(4\sin t - 3) \\ &= 2 - 3i + 4e^{it} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

b - Le vecteur directeur du segment joignant les pts $1+i$, $4-2i$ est donné par : $(4-2i) - (1+i) = 3-3i$. Une équation paramétrique est déterminée par : $z(t) - (1+i) = t(3-3i)$

et donc $z(t) = (1+i) + t(3-3i) = (1+3t) + i(1-3t)$

on a : $z_0 = 1+i \Leftrightarrow 1+i = (1+i) + t(3-3i) \Rightarrow \boxed{t=0}$

$z_1 = 4-2i \Leftrightarrow 4-2i = (1+i) + t(3-3i) \Rightarrow \begin{cases} 3t = t \\ -3i = -3i t \end{cases} \Rightarrow \boxed{t=}$

$$z(t) = (1+3t) + i(1-3t) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

* Exercice 2 :

a - $z(t) = 5 - 2it$, $-3 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 5 \\ y(t) = -2t \end{cases}$

Le segment vertical $x = 5$ qui relie les 2 pts z_0, z_1 avec $z_0 = 5+6i$ et $z_1 = 5-6i$

L'équation représente le segment fermé reliant les pts $5+6i$ et $5-6i$.

b - $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}$ $\quad 0 \leq t \leq 2$. $\Rightarrow \begin{cases} x(t) - 1 = \cos(\pi t) \\ y(t) - 1 = -\sin(\pi t) \end{cases}$

$= 1 + i + \cos(-\pi t) + i\sin(-\pi t)$

L'arc du cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 1 reliant les pts

$(x(0), y(0)) = (2, 1)$ et $(x(2), y(2)) = (2, 1)$.

$\Rightarrow$ L'équation représente le cercle de centre $(1, 1)$ et de rayon

$\Rightarrow \quad Z(t) = 1 + 2t + i8t^2 \qquad -1 \leq t \leq 1$.

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 8t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x(t) - 1}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{(x(t) - 1)^2}{4}$$
$$\Rightarrow y(t) = 2(x(t) - 1)^2$$

On obtient le parabole $y = 2(x-1)^2$ L'équation représentant la position de la parabole joignant les pts $z_0 = -1 + 8i$ et $z_1 = 3 + 8i$.

*** Exercice 3 :**

- $\int_C e^{2z} dz$, C le segment qui relie les pts πi à $2\pi i$.

La fonction $f(z) = e^{2z}$ est holomorphe donc :

$$\int_C e^{2z} dz = \left[\frac{e^{2z}}{2}\right]_{\pi i}^{2\pi i} = \frac{1}{2}\left[e^{4\pi i} - e^{2\pi i}\right] = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$$

- $\int_C \bar{z}\, dz$: C : le parabole $y = x^2$ reliant les pt $-1 + i$ à $1 + i$.

* une équation paramétrique de la courbe est donnée par :

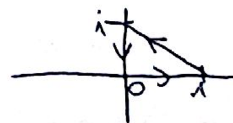
$$Z(t) = t + it^2 \quad , \quad (y = x^2)$$

pour $z_0 = -1 + i \Leftrightarrow -1 + i = t + it^2 \Rightarrow t_0 = -1$

et $z_1 = 1 + i \Leftrightarrow 1 + i = t + it^2 \Rightarrow t_1 = 1$

Donc : $z(t) = (t + it^2)$, $z'(t) = (1 + 2it)$

$$\int \bar{z}\, dz = \int_{-1}^{1} (t - it^2)(1 + 2it)\, dt = \int_{-1}^{1} (t + 2t^3 + it^2)\, dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\right]_{-1}^{1} + i\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = i\frac{2}{3}$$



-- $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ avec $z = x + iy$.

* pour c_1 : le segment reliant $z_0 = 0$ à $z_1 = 1$ $\qquad 0 \leq t \leq 1$

$$Z(t) = 0 + (1 - 0)t = t + 0i$$

et $\int_{C_1} 2x(t)y(t)\, dz = \int_{C_1} 0\, dz = 0$

- pour C_2 : le segment reliant $z_1 = 1$ à $z_2 = i$.

$$Z(t) = 1 + (i - 1)t = 1 - t + ti \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C2} 2x(t)y(t)\,dz = \int_0^1 2t(1-t)(i-1)\,dt = 2(i-1)\int_0^1 t-t^2\,dt = \frac{i-1}{3}$$

pour C_3 : le segment qui lie $z_0 = i$ et $z_1 = 0$.

$$z(t) = i + (0-i)t = 0 + (1-t)i \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

et $\int_{C_3} 2x(t)y(t)\,dz = \int_{C_3} 0\,dz = 0$

Finalement on aura : $\int_C \operatorname{Im} z^2\,dz = \int_{C1} \operatorname{Im}(z^2)\,dz + \int_{C2} \operatorname{Im}(z^2)\,dz + \int_{C3} \operatorname{Im}(z^2)$

$$= \frac{i-1}{3}$$

Exercice 4 :

1- $\oint_C \operatorname{Re}(z)\,dz$.



L'équation paramétrique du demi cercle de centre (0,0) et de rayon 1 est : $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ avec : $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Donc :

$$\oint_C \operatorname{Re}(z)\,dz = \oint_0^\pi 2\cos(t)(-\sin t + i\cos t)\,dt = -2\oint_0^\pi \sin t\cos t\,dt + 2i\oint_0^\pi \cos^2$$

$$= -2\oint_0^\pi \sin(2t)\,dt + i\oint_0^\pi 1+\cos(2t)$$

$$= [\cos(2t)]_0^\pi + i\,[t + \sin(2t)]_0^\pi$$

$$= i\pi$$

b- $\frac{7z-6}{z^2-2z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} \Rightarrow (A,B) = (3,4)$.

alors : $\oint_C \frac{7z-6}{z^2-2z}\,dz = \oint \frac{3}{z}\,dz + \oint_C \frac{4}{z-2}\,dz$

$$= 3(2\pi i) + 4(2\pi i) = 14\pi i$$

c- $z_0 = -2$ est un pt singulier pour la fonction $\ln(2+z)$ dans $\mathbb{C}$ or z_0 n'appartient pas au carré des sommets $\pm 1, \pm i$ d'où :

$$\oint_C \ln(2+z)\,dz = 0$$

Exercice 5 :

1- $f(z) = (1+2z)\cos z$ est une fonction holomorphe, le pt singulier $z_0 = \frac{1}{2}$ de la fonction $\frac{f(z)}{(2z-1)^2}$ qui est holomorphe appartient à C

alors c'est une pointe régulière.
oui, on peut appliquer la formule de Cauchy :

$$\oint_C \frac{(1+2z)\cos z}{(2z-1)^2}\,dz = 2\pi i\, f'(z_0) = 2\pi i\left(2\cos(z_0) - (1+2z_0)\sin(z_0)\right)$$
$$= 4\pi i\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

- les pts $z_0 = 0$ et $z_1 = 2i$ sont des pts singuliers pour la fct $\frac{e^{2z}}{z(z-2i)^2}$
la seule pointe qui appartient à C est z_1.
alors $f(z) = \frac{e^{2z}}{z}$ est une fct holomorphe ds C et on a :

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{z(z-2i)^2}\,dz = (2i\pi)\, f'(z_1) = 2\pi i\, e^{2z_1}\,\frac{2z_1 - 1}{z_1^2}$$

Exercice 6 :

1- En utilisant la fraction rationnelle : $\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3} \Rightarrow (A,B) = (1,-$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+2)(i+3)} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$

Donc $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+2)(i+3)} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$

t une série convergent de limite égale à $\frac{1}{3}$.

-a: La série $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et donc
onvergente, de plus : $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{3}$

e même :
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{3}{1+\frac{1}{5}} = \frac{15}{6}.$$

n conséquent la série $\sum_{n=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]$ est convergente.

et $\sum_{n=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right] = \frac{8}{3} + \frac{15}{6} = \frac{31}{6}$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n+2}$ est une série divergente car $\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n+2} = 1 \neq 0$

- $\sum_{1} \frac{7^n + 3^n}{5^n}$,

-a série $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{7}{5}\right| > 1 \Rightarrow$ elle est

La série $\sum_{n=1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{3}{5}\right| < 1 \Rightarrow$ elle est convergente, d'où la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+3^n}{5^n}$ est divergente

c. a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^2+2}$.

on a : $\lim_{\infty} \frac{n-3}{n^2+2} = \lim_{\infty} \frac{1}{n} = 0$

et : $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-3}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = 1$, or la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente

alors la série $\sum_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+2}$ est divergente.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arctg}(n)}{n^2+1}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{Arctg}(x)}{x^2+1}\,dx = \int_1^{\infty} \text{Arctg}(x)\,\text{Arctg}'(x)\,dx = \left[\frac{\text{Arctg}^2(x)}{2}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = ?$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arctg}(n)}{n^2+1}$ est convergente.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{100}}$, D'après le test du quotient on a :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{100}} \cdot \frac{n^{100}}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^{100}}{(n+1)^{99}}\right| = +\infty$$

donc la série est divergente.

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ le test quotient nous donne :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{\infty} \left|\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2+1}\right| = \lim_{\infty} \left|\frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

Donc la série est convergente.

- on va utiliser le test quotient :

$$\lim_{\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(x+3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^n (x+3)^n}\right|$$

$$= \lim_{\infty} \left|(x+3) \cdot \frac{n}{n+1}\right| = |x+3|$$

Donc :

si $|x+3| < 1 \Rightarrow$ la série absolument convergente.

si $|x+3| = 1 \implies x = -4$ ou $x = -2$

pour $x = -4$: on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ d

pour $x = -2$: on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^n}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)^n}{n} = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$

est une serie alternée, tel que $\frac{1}{n}$ est decroissante, $\lim_{\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc la série convergente.

Et l'ensemble de convergence est $]-4, -2]$.

Exercice 7 :

1. a - $\sum_{0}^{\infty} \left(\frac{10-15i}{n!}\right)^n$

on $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim \left|\left(\frac{10-15i}{(n+1)!}\right)^{n+1} \left(\frac{n!}{10-15i}\right)^n\right| = \lim_{\infty} \left|\frac{10-15i}{(n+1)!\,(n+1)^n}\right| = 0$

$\implies$ Convergente.

_b- on a : $\left|\frac{i^n}{n^2-2i}\right| = \frac{|i|^n}{|n^2-2i|} < \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n^2-2i}\right|$ converge d'où $\sum \frac{i^n}{n^2-2i}$ converge aussi.

_c- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{i^n}{3^n}$ — CV $\sum \frac{(z+i)^n}{n^2}$ — on a : $\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim \left|\frac{(z+i)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(z+i)^n}\right| = |z+i| \lim_{\infty} \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|$
$= |z+i|$

et l'ensemble de convergence est $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z+i| < 1\}$.

b_ $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}$, $\lim_{\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim \left|\frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n z^{2n}}\right| = 0$

donc l'ensemble de convergence est $\mathbb{C}$.

c - $\sum_{1}^{\infty} \frac{(4)^n}{(1+i)^n}(z-5)^n$

$\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{\infty} \left|\frac{(4)^{n+1}(z-5)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} \cdot \frac{(1+i)^n}{(4)^n(z-5)^n}\right| = \left|\frac{4}{1+i} \cdot (z-5)\right|$
$= \frac{4}{\sqrt{2}} |z-5|$

Donc pour que la serie converge il faut que :

$\frac{4}{\sqrt{2}} |z-5| < 1 \implies |z-5| < \frac{\sqrt{2}}{4}$

Et par conséquent l'ensemble de convergence est :

$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-5| < \frac{\sqrt{2}}{4}\}$.

https://www.facebook.com/allcourstdtp